Sous-espaces de dimension finie de l'espace des distributions stables par translation

Un développement assez classique est le théorème suivant :

Théorème 1. Si E est un sous-espace de $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (ou $C(\mathbb{R},\mathbb{C})$) de dimension finie et stable par les opérateurs de translation, alors E est l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants.

On se propose de généraliser ce résultat aux sous-espaces de l'ensemble des distributions.

On note $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions tests (c'est-à-dire C^∞ à support compact), $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ l'ensemble des distributions sur $\mathbb{R}$. On note $\langle T,\varphi\rangle$ pour l'évaluation d'une distribution T sur une fonction test φ. On note T' la distribution $\varphi \mapsto -\langle T,\varphi'\rangle$. On note, pour $a\in\mathbb{R}$, $\tau_a\varphi : x\mapsto \varphi(x+a)$ puis $\tau_a T : \varphi \mapsto \langle T,\tau_{-a}\varphi\rangle$. Les translations et la dérivation commutent (appliqués à une fonction test ou à une distribution). On rappelle qu'une suite (φ_n) de fonctions tests converge vers une fonction test φ si tous les supports sont inclus dans un même compact et si $\varphi_n^{(k)}$ converge uniformément vers $\varphi^{(k)}$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. De plus, si (φ_n) tend vers φ, alors $\langle T,\varphi_n\rangle$ tend vers $\langle T,\varphi\rangle$ pour toute distribution T.

Théorème 2. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ de dimension finie et stable par les opérateurs de translations τ_a, $a\in\mathbb{R}$. Alors E est l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants. Autrement dit, E est stable par l'opérateur de dérivation D et il existe un polynôme P tel que $E=\ker(P(D))$.

Démonstration.

Lemme 1. Soit $T\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ et $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$. La fonction $a\mapsto\langle T,\tau_a\varphi\rangle$ (qui vaut aussi $\langle\tau_{-a}T,\varphi\rangle$) est dérivable de dérivée $a\mapsto\langle T,\tau_a\varphi'\rangle$ (qui vaut aussi $-\langle\tau_{-a}T',\varphi\rangle$).

Démonstration. Soient $a\in\mathbb{R}$, $h\in\mathbb{R}$. On note f la fonction considérée. On a alors $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\langle T,\tau_a\frac{(\tau_h\varphi-\varphi)}{h}\rangle$. Quand h tend vers 0, les fonctions $\tau_a\frac{(\tau_h\varphi-\varphi)}{h}$ ont leur support inclus dans un même compact, et ont toutes leurs dérivées successives qui convergent uniformément vers les dérivées successives de $\tau_a\varphi'$, d'après la formule de Taylor. Ainsi, $\tau_a\frac{(\tau_h\varphi-\varphi)}{h}$ converge au sens des fonctions tests vers $\tau_a\varphi'$, donc $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ converge vers $\langle T,\tau_a\varphi'\rangle$, ce qu'on voulait. □

Pour $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$, on considère la forme linéaire l_φ sur E définit par : $l_\varphi(T)=\langle T,\varphi\rangle$. On a $\bigcap_{\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})}\ker(l_\varphi)=\{0\}$ par définition d'une distribution, donc les l_φ engendrent E^*. On en extrait une base $l_{\varphi_1},\dots,l_{\varphi_n}$ de E^*. On en considère la base antéduale de E : $T_1,\dots,T_n$. Soient $T\in E$, $a\in\mathbb{R}$. Comme $\tau_a T$ est un élément de E, il se décompose dans la base des T_i : $\tau_a T=\sum_{i=1}^n\langle\tau_a T,\varphi_i\rangle T_i$.

Soit $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$. On a alors $\langle\tau_a T,\varphi\rangle=\sum_{i=1}^n\langle\tau_a T,\varphi_i\rangle\langle T_i,\varphi\rangle$. On peut dériver par rapport à a grâce au lemme et on obtient $\langle\tau_a T',\varphi\rangle=\sum_{i=1}^n\langle\tau_a T',\varphi_i\rangle\langle T_i,\varphi\rangle=\langle\sum_{i=1}^n\langle\tau_a T',\varphi_i\rangle T_i,\varphi\rangle$. Cette égalité étant valable pour tout φ, on a donc $\tau_a T'=\sum_{i=1}^n\langle\tau_a T',\varphi_i\rangle T_i$, puis en prenant $a=0$, on obtient $T'=\sum_{i=1}^n\langle T',\varphi_i\rangle T_i$, donc T' est une combinaison linéaire des T_i, donc est dans E.

Ainsi E est stable par l'opérateur de dérivation D. Considérons le polynôme minimal P de $D\restriction_E$. On a d'une part $\deg(P)\leq\dim(E)$ (Cayley-Hamilton), d'autre part $\dim(E)\leq\deg(P)$, car toute solution au sens des distributions d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants est une solution C^∞ (affirmation justifiée dans le lemme suivant), et l'ensemble des solutions C^∞ de $P(D)=0$ est de dimension $\deg(P)$.

Lemme 2. Soit T une distribution telle que $P(D)(T)=0$ au sens des distributions. Alors T est C^∞.

Démonstration. Par le lemme des noyaux, et en se plaçant dans $\mathbb{C}$, on a $\ker(P(D))=\bigoplus_i\ker(D-\lambda_i Id)^{n_i}$ où les λ_i sont les racines de P, de multiplicité n_i.

On se ramène donc au cas où $P=(X-\lambda)^n$.

On pose $e_\lambda : x\mapsto e^{\lambda x}$. On peut multiplier une distribution par une fonction C^∞, et on a la formule de Leibniz $D(\psi T)=D(\psi)T+\psi D(T)$. On a alors, $D(e_{-\lambda}T)=e_{-\lambda}(D-\lambda Id)(T)$. Ainsi, T vérifie $(D-\lambda Id)^n(T)=0$ si et seulement si $D^n(e_{-\lambda}T)=0$.

On se ramène donc au cas où $P=X^n$.

Si $T'=0$, c'est un résultat classique que T est une fonction constante.

Par récurrence, montrons que $D^n(T)=0$ si et seulement si T est un polynôme de degré $\leq n-1$. Si cela est vrai pour un entier n, et si $D^{n+1}(T)=0$, alors $D^n(T)$ est une constante, disons c, or $c=D^n(cx^n/n!)$, donc $D^n(T-cx^n/n!)=0$ donc $T-cx^n/n!$ est une polynôme de degré $\leq n-1$, donc T est une polynôme de degré $\leq n$. □

□